

§4.1 第2课时 平面的法向量及其应用

【学习目标】

- 1.能用向量语言表述平面.
- 2.理解平面的法向量, 并且会求平面的法向量.
- 3.会应用平面的法向量解决一些简单的问题.

【重点难点】

重点: 理解平面的法向量, 并且会求平面的法向量.

难点: 会应用平面的法向量解决一些简单的问题.

一、直接导入

◇知识点一 平面的法向量

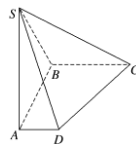
【知识梳理】

如果一条直线 l 与一个平面 α 垂直, 那么就把直线 l 的 _____ n 叫作平面 α 的法向量.

注意点:

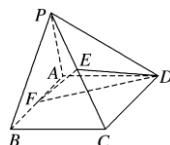
- (1)平面 α 的一个法向量垂直于平面 α 内的所有向量.
- (2)一个平面的法向量有无限多个, 它们相互平行.

例1 如图所示, 已知四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, $SA \perp$ 平面 $ABCD$, $SA = AB = BC = 1$, $AD = \frac{1}{2}$, 试建立适当的坐标系.



- (1)求平面 $ABCD$ 的一个法向量;
- (2)求平面 SAB 的一个法向量.

跟踪训练1 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAB$ 是边长为1的正三角形, $ABCD$ 是菱形, $\angle ABC = 60^\circ$, E 是 PC 的中点, F 是 AB 的中点, 试建立恰当的空间直角坐标系, 求平面 DEF 的一个法向量.



◇知识点二 平面的方程

【知识梳理】

设平面 α 内一点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 其法向量 $\mathbf{n}=(A, B, C)$, 则对于平面 α 内任意一点 $P(x, y, z)$, 有 $\vec{MP} \cdot \mathbf{n}=0$, 则平面 α 的方程为_____

例2 设经过原点的平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(6,3,2)$.

(1)求平面 α 的方程;

(2)若 $A(0,0,0)$, $C(a,2,3)$, 直线 AC 与平面 α 的交点为 E , 且 $\vec{AE}=\frac{1}{2}\vec{EC}$, 求 a .

跟踪训练2 写出经过 $A(3,2,1)$ 且与直线 l 的方向向量 $\mathbf{n}=(-1,3,4)$ 垂直的平面 α 的方程.

◇知识点三 法向量的应用

例3 已知平面 α 内的两个向量 $\mathbf{a}=(1,1,1)$, $\mathbf{b}=(0,2,-1)$, 且 $\mathbf{c}=m\mathbf{a}+n\mathbf{b}+(4,-4,1)$. 若 \mathbf{c} 为平面 α 的法向量, 则 m, n 的值分别为()

- A. $-1, 2$ B. $1, -2$ C. $1, 2$ D. $-1, -2$

跟踪训练3 已知平面 α 内有一点 $A(2, -1, 2)$, 平面 α 的一个法向量为 $\mathbf{n}=(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$, 则下列四个点中在平面 α 内的是()

- A. $P_1(1, -1, 1)$ B. $P_2(1, 3, \frac{3}{2})$ C. $P_3(1, -3, \frac{3}{2})$ D. $P_4(-1, 3, -\frac{3}{2})$

三、随堂演练

1. 若点 $A(-1,0,1)$, $B(1,4,7)$ 在直线 l 上, 若 $l \perp$ 平面 α , 则平面 α 的一个法向量为()

- A. $(1,2,3)$ B. $(1,3,2)$ C. $(2,1,3)$ D. $(3,2,1)$

2. (多选)在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 以下向量可以作为平面 ABC 法向量的是()

- A. \vec{AB} B. $\vec{AA_1}$ C. $\vec{B_1B}$ D. $\vec{A_1C_1}$

3. 若 $\mathbf{n}=(2, -3, 1)$ 是平面 α 的一个法向量, 则下列向量中能作为平面 α 的法向量的是()

- A. $(0, -3, 1)$ B. $(2, 0, 1)$ C. $(-2, -3, 1)$ D. $(-2, 3, -1)$

4. 已知平面 α 经过点 $O(0,0,0)$, 且 $\mathbf{e}=(1,2, -3)$ 是 α 的一个法向量, $M(x, y, z)$ 是平面 α 内任意一点, 则平面 α 的方程是_____.

1. 知识清单:

(1)平面的法向量的定义及求法. (2)平面的方程. (3)法向量的应用.

2. 方法归纳: 待定系数法.

3. 常见误区: 不理解平面法向量的作用和不唯一性.

五、布置作业(课时对点训练)

基础巩固

- 已知平面 α 的一个法向量是 $(2, -1, -1)$, $\alpha \parallel \beta$, 则下列向量可作为平面 β 的一个法向量的是()
A. $(4, 2, -2)$ B. $(2, 0, 4)$ C. $(2, -1, -5)$ D. $(4, -2, -2)$
- 在菱形 $ABCD$ 中, 若 \vec{PA} 是平面 $ABCD$ 的法向量, 则以下关系中可能不成立的是()
A. $\vec{PA} \perp \vec{AB}$ B. $\vec{PC} \perp \vec{BD}$ C. $\vec{PC} \perp \vec{AB}$ D. $\vec{PA} \perp \vec{CD}$
- 已知平面 α 上的两个向量 $\mathbf{a}=(2, 3, 1)$, $\mathbf{b}=(5, 6, 4)$, 则平面 α 的一个法向量为()
A. $(1, -1, 1)$ B. $(2, -1, 1)$ C. $(-2, 1, 1)$ D. $(-1, 1, 1)$
- 已知向量 $\vec{AB}=(2, 4, x)$, 平面 α 的一个法向量 $\mathbf{n}=(1, y, 3)$, 若 $AB \subset \alpha$, 则()
A. $x=6, y=2$ B. $x=2, y=6$ C. $3x+4y+2=0$ D. $4x+3y+2=0$
- (多选) 已知平面 α 过点 $A(1, -1, 2)$, 其法向量 $\mathbf{n}=(2, -1, 2)$, 则下列点不在 α 内的是()
A. $Q(2, 3, 3)$ B. $R(3, -3, 4)$ C. $M(-1, 2, 0)$ D. $N(-2, 0, 1)$
- 已知 $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 1)$, 则平面 ABC 的一个单位法向量是()
A. $(1, 1, 1)$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
- 若平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{a}=(-1, 2, 4)$, $\mathbf{b}=(x, -1, -2)$, 并且 $\alpha \perp \beta$, 则 x 的值为_____.
- 已知直线 l 的方向向量为 $\mathbf{e}=(-1, 1, 2)$, 平面 α 的法向量为 $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{2}, \lambda, -1\right)(\lambda \in \mathbf{R})$, 若 $l \perp \alpha$, 则实数 λ 的值为_____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $A(1, -1, 2)$, $B(3, 3, 1)$, $C(3, 1, 3)$, 设 $M(x, y, z)$ 是平面 ABC 内任意一点.
(1) 求平面 ABC 的一个法向量;
(2) 求 x, y, z 满足的关系式.
- 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是 DD_1 的中点, O 为底面 $ABCD$ 的中点, 求证: $\vec{OB_1}$ 是平面 PAC 的一个法向量.

